Założenia: $\{x+12>0; \quad x \neq 1; \quad x>0;$

$D: x>0 \quad x \neq 1.$

Rozwiązanie:

$$\log_4(x+12) \cdot \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = 1$$

$$\log_4(x+12) \cdot \frac{1}{2\log_4 x} = 1$$

$$\frac{1}{2}\log_x(x+12) = 1 \qquad \log_x(x+12) = 2$$

Z definicji logarytmu:

$$x+12 = x^2$$

$$x^2 - x - 12 = 0; \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 4$$

Zgodnie z założeniami rozwiązaniem jest tylko x = 4.

b/ $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$

Założenia:

$\{x>0; \quad x \neq 1;$

Rozwiązanie: Zastosujemy ponownie twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.

$$\log_x 7 + \log_{x^2} x \cdot \log_x 7 = 6$$

$$\log_x 7 + \frac{1}{2}\log_x 7 = 6; \quad \frac{3}{2}\log_x 7 = 6; \quad \log_x 7 = \frac{12}{3};$$

$$x^4 = 7; \qquad x = \sqrt[4]{7};$$

41/ Rozwiązać równanie

a/ $\log_{3x} 3 = (\log_3 3x)^2$

Założenia: $x>0; \quad x \neq \frac{1}{3};$

Rozwiązanie:

Zastosujemy twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu:

$$\left(\frac{\log_3 3}{\log_3 3x}\right) = \left(\frac{1}{\log_3 3x}\right) = (\log_3 3x)^2$$

Podstawienie: $\log_3 3x = t$

$$\frac{1}{t} = t^2; \quad t^3 = 1; \quad (t-1)(t^2+t+1) = 0; \quad t = 1$$

$$\log_3 3x = 1; \quad \log_3 3x = \log_3 3; \quad x = 1.$$

b/ $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$

Założenia: $a>0; \quad a \neq 1; \quad x>0; \quad x \neq 1;$

Po zastosowaniu twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu, mamy:

$$2\log_x a + \frac{\log_x a}{\log_x x \cdot a} + 3\frac{\log_x a}{\log_x a^2 \cdot x} = 0$$

Podstawienie: $\log_x a = t$

$$2t + \frac{t}{\log_x x + \log_x a} + 3\frac{t}{\log_x a^2 + \log_x x} = 0$$

$$\frac{4t^3 + 11t^2 + 6t}{(1+t)(2t+1)} = 0 \qquad t \cdot (4t^2 + 11t + 6) = 0;$$

$$t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = -2 \quad \vee \quad t_3 - \frac{3}{4}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy ponieważ a ≠ 1. Dla pozostałych t:

$$\log_x a = -2 \qquad \log_x a = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\log_a a}{\log_a x} = -2 \qquad \frac{\log_a a}{\log_a x} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\log_a x} = -2 \qquad \frac{1}{\log_a x} = -\frac{3}{4}$$

$$\log_a x = -\frac{1}{2} \qquad \log_a x = -\frac{4}{3}$$

$$x = a^{-\frac{1}{2}} \qquad x = a^{-\frac{4}{3}}$$

42/ Rozwiązać równanie

a/ $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$