PRZYKŁADY

47/ *Obliczyć całkę potrójną* $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+1)(y+1)(z+1)}$
gdzie obszar Ω jest ograniczony powierzchniami
x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3.
Obszar przestrzenny Ω jest prostopadłościanem. Obszar płaski D jest prostokątem. Aby obliczyć całkę 47/ wykorzystamy wzór (2.1):

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}\int_0^2\frac{dy}{y+1}\int_0^3\frac{dz}{z+1}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}\int_0^2\left[\ln|z+1|\right]_0^3\frac{dy}{y+1}=2\ln 2\int_0^1\frac{dx}{x+1}\int_0^2\frac{dy}{y+1}$$

$$=2\ln 2\int_0^1\left[\ln|y+1|\right]_0^2\frac{dx}{x+1}=2\ln 2\ln 3\int_0^1\frac{dx}{x+1}=2\ln 2\ln 3\left[\ln|x+1|\right]_0^1=2\ln^2 2\ln 3.$$

48/ *Obliczyć całkę potrójną* $\iiint\limits_{\Omega}y\cos(x+z)dxdydz$, *gdzie obszar* Ω *jest ograniczony walcem parabolicznym* $y=\sqrt{x}$ *oraz płaszczyznami* $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Obszar Ω można określić nierównościami:

$$\Omega=\left\{0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\sqrt{x};0\le z\le -x+\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Całkę potrójną obliczamy jako całkę iterowaną:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\int_0^{-x+\frac{\pi}{2}}\cos(x+z)dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\left[\sin(x+z)\right]_0^{-x+\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}(1-\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}$$

49/ *Obliczyć całkę potrójną* $\iiint\limits_{\Omega}xydxdydz$, *gdzie* Ω *jest obszarem ograniczonym paraboloidą hiperboliczną* $z=xy$ *oraz płaszczyznami* $x+y=1$, $z=0$, $z\ge 0$.

Obszar Ω można ograniczyć nierównościami:

$$\Omega=\{0\le x\le 1;0\le y\le -x+1;0\le z\le xy\}$$

Całkę potrójną 49/ rozpiszemy jako całkę iterowaną:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}xydxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{-x-1}ydy\int_0^{xy}dz=\int_0^1 xdx\int_0^{-x-1}ydy[z]_0^{xy}=\int_0^1 xdx\int_0^{-x+1}xy^2dy=$$

$$=\int_0^1 x^2dx\int_0^{-x+1}y^2dy=\int_0^1 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{-x+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2(-x+1)^3dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(-x^5+3x^4-3x^3+x^2\right)dx=$$

$$-\frac{1}{3}\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{3x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\frac{1}{180}$$

50/ *Obliczyć całkę potrójną* $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)zdxdydz$, *gdzie obszar* Ω *jest ograniczony kulą* $x^2+y^2+z^2=1$ *oraz płaszczyznami* $x=0$, $y=0$, $z=0$. $(x\ge 0,\ y\ge 0;\ z\ge 0)$.

Obszar przestrzenny Ω jest ósemką kuli. Możemy go zdefiniować we współrzędnych sferycznych następująco:

$$\Omega=\left\{0\le\phi\le\frac{\pi}{2};0\le\theta\le\frac{\pi}{2};0\le r\le 1\right\}.$$

Funkcja podcałkowa we współrzędnych sferycznych przybierze postać:

$$(x+y)z=(r\cos\phi\sin\theta+r\sin\phi\sin\theta)r\cos\theta=r^2\sin\theta(\cos\phi+\sin\phi)\cos\theta$$

Przy zamianie współrzędnych na sferycznych należy pamiętać o pomnożeniu funkcji pod całką przez jakobian. A zatem całka 50/ wynosi:

$$I\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^4\sin^2\theta\cos\theta(\cos\phi+\sin\phi)d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi+\sin\phi)d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi+\sin\phi)d\phi\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi+\sin\phi)d\phi=\frac{1}{15}[\sin\phi-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{15}$$

51/ *Obliczyć całkę potrójną* $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *gdzie obszar* Ω *jest ograniczony płaszczyznami* $y=0$, $z=0$, $z=3$ *oraz walcem* $x^2+y^2=2x$.